

Estoy aproximando una distribución a posteriori por un grid de los valores de θ . Supongamos que θ sigue una distribución a priori Beta(1,7), y la distribución de verosimilitud es una Binomial($X = x, 7, \theta$).

He aquí la cuestión: ¿cómo trato con esa X ? Hasta donde he llegado, diría que corresponde con los datos que hayamos tomado. Como no tengo datos, me invento unos. Por ejemplo, supongo que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ siguen una distribución aleatoria de Poisson($\lambda=1$).

Ahora pasemos a R. A continuación muestro el código que he hecho para simular este experimento. Suprimo los comentarios aclaratorios, no creo que le sean necesarios. Es un código muy sencillo.

```
thetas = c(1:10000) / 10000

x = rpois(5, 1)
apriori = dbeta(thetas, 1, 7)
verosimilitud = dbinom(x = x[1], size = 7, prob = thetas)
unstd.posteriori = verosimilitud * apriori
posteriori = unstd.posteriori / sum(verosimilitud*apriori)

for (valor in x[c(2:length(x))]) {
  verosimilitud = dbinom(x = valor, size = 7, prob = thetas)
  unstd.posteriori = verosimilitud * posteriori
  posteriori = unstd.posteriori / sum(verosimilitud*posteriori)
  # posteriori
}
```

¿He dado en el clavo?

$$\theta \sim \text{Beta}(1,7) \quad (1)$$

$$X \sim \text{Binomial}(7,\theta) \quad (2)$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$$\Pr(\theta | (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = \frac{\Pr((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | \theta) \Pr(\theta)}{\Pr((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))} \quad (3)$$

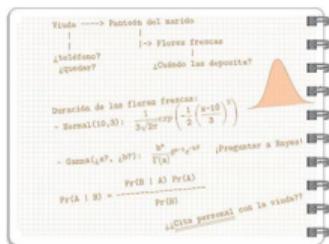
$$\Pr((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | \theta) = \prod_{i=1}^5 \Pr(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^5 \text{dbinom}(x_i, 7, \theta) \quad (4)$$

$$\Pr(\theta) = \text{dbeta}(\theta, 1, 7) \quad (5)$$

$$\Pr((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = \int \prod_{i=1}^5 \Pr(x_i | \theta) \Pr(\theta) d\theta \quad (6)$$

EL DETECTIVE SALAZAR Y LOS MODELOS BAYESIANOS

Emilio Torres Manzanera



Textos universitarios



Distribución conjugada Beta-Binomial, pág. 80.

$$\left. \begin{array}{l} \theta \sim \text{Beta}(a, b) \quad [\text{A priori}] \\ X | \theta \sim \text{Binomial}(n, \theta) \quad [\text{Verosimilitud}] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{A posteriori} \\ \Rightarrow \end{array} \quad (7)$$

$$\theta | \{X = (x_1, \dots, x_r)\} \sim \text{Beta}\left(a + \sum_{i=1}^r x_i, b + \sum_{i=1}^r (n - x_i)\right). \quad (8)$$

Método del mallado en el caso *El detective Salazar y la ciudad de origen*, pág. 85.

Para operar computacionalmente, trabajar con logaritmos:

$$\log\left(\left(\prod_i a_i\right) \cdot b\right) = \sum_i \log a_i + \log b. \quad (9)$$

```
> set.seed(123) # Fijar una semilla para garantizar reproducibilidad
> x <- rpois(5, 1) # generamos datos de una distribución Poisson
> x # Tiene que ser menor que <=7 (por la binomial)
[1] 0 2 1 2 3
> length(x) # 5 observaciones
[1] 5
> ## Para theta=0.5 y con 5 observaciones
> (l <- dbinom(x , size=7, prob= 0.5))
[1] 0.0078125 0.1640625 0.0546875 0.1640625 0.2734375
> ## la verosimilitud es el producto. <-- ¡que se te olvida esto!
> prod(l) # Verosimilitud para theta=0.5
[1] 3.144523e-06
> ## la apriori en este caso es (logaritmos)
> apriori <- dbeta(0.5,1,7)
> prod(l)*apriori # numerador
[1] 3.439322e-07
```

```
> ## Pero es mejor trabajar con logaritmos por el tema de la precisión
> (logl <- dbinom(x , size=7, prob= 0.5,log=TRUE))
[1] -4.852030 -1.807508 -2.906120 -1.807508 -1.296682
> ## la verosimilitud sería el producto, que en logaritmos es suma
> sum(logl)
[1] -12.66985
> ## la apriori en este caso es (logaritmos)
> apriori <- dbeta(0.5,1,7,log=TRUE)
> ## y el numerador sería (logaritmos)
> sum(logl)+apriori
[1] -14.88282
```

```
> thetas <- c(1:10000) / 10000 # Mallado de thetas
> length(tetas) # 1e4
[1] 10000
> ## Generamos la distribución a priori
> apriori <- dbeta(tetas, 1, 7)
> length(apriori)
[1] 10000
```

```
> ## =====  
> ## Falla por un tema de R, de programación, no que lo hayas planteado mal  
> ## Aquí es donde R se vuelve un poco tonto  
> ## X mide 5 y theta mide 1e4: el resultado debería medir 5*1e4  
> verosimilitud <- dbinom(x , size=7, prob= thetas) # Mal  
> length(verosimilitud) # da 1e4: debería ser 5*1e4  
[1] 10000
```

```
## Hacemos unas pruebas sencillas para theta=0.5 y 0.8.
(a1 <- dbinom(x, size=7, prob= c(0.5),log=TRUE)) # 5 longitud
(a2 <- dbinom(x, size=7, prob= c(0.8),log=TRUE)) # 5 longitud
length(dbinom(x, size=7, prob= c(0.5,0.8),log=TRUE)) # Maldición, no es 10.
[1] 5
## Queremos que salga
(res <- c(sum(a1)+dbeta(0.5,1,7,log=TRUE),sum(a2)+dbeta(0.8,1,7,log=TRUE)))
## Probamos un vector de longitud 2
vectorp <- c(0.5,0.8)
res2 <- sapply(vectorp,function(p){ # Para cada valor p=0.5, 0.8
  logl <- sum(dbinom(x , size=7, prob= p,log=TRUE)) # verosimilitud
  apriori <- dbeta(p,1,7,log=TRUE) # a priori
  logl + apriori
})
all(res==res2) # ¡Bingo! Son iguales
[1] TRUE
```

```
## Lo hacemos para todo el mallado de thetas
numerador <- sapply(thetas,function(p){
  logl <- sum(dbinom(x , size=7, prob= p,log=TRUE)) # verosimilitud
  apriori <- dbeta(p,1,7,log=TRUE) # a priori
  logl + apriori
})
numeradorenbasenormal <- exp(numerador) # Deshacemos el logaritmo
denominador <- sum(numeradorenbasenormal) # del teorema de Bayes
aposteriori <- numeradorenbasenormal/denominador # Normalizamos para que sum
hist(aposteriori,prob=TRUE) # Debería salir una Beta.
```

Cómo evaluar este ejercicio:

- ▶ Exposición del problema: plantea adecuadamente el problema y aporta una posible solución bien encaminada, 9/10.
- ▶ Inventar de nuevo la rueda. Falta indicar si ha realizado algún búsqueda sobre este tema e indicar porqué no sirven esas soluciones para este problema o qué cosas habría que adaptar: 0/10.
- ▶ Fundamento teórico. Conoce los fundamentos del teorema de Bayes y del mallado, pero falla con la función de verosimilitud y no menciona la solución teórica: 4/10.
- ▶ Programación. Funciona y no da errores, pero no aparece ningún comentario: 4/10.
- ▶ Interés por aprender. Muestra una actitud proactiva y da imagen de ser espabilado: 9/10.